

# Numerische Methoden zur Erforschung einer $\mathcal{N} = 1$ Super Yang-Mills-Theorie mit $SU(2)_c$ und $SU(3)_c$ Wilson Fermionen

Alexander Ferling



Münster, den 29. Mai 2009



- 1 Das Konzept der Supersymmetrie
- 2 Die Wirkung auf dem Gitter
- 3 Der Simulationsalgorithmus



# Welche Motivation führt zur Erweiterung des Standardmodells?

- Bosonen: → insgesamt 28 Freiheitsgrade
- Fermionen: → insgesamt 42 Freiheitsgrade

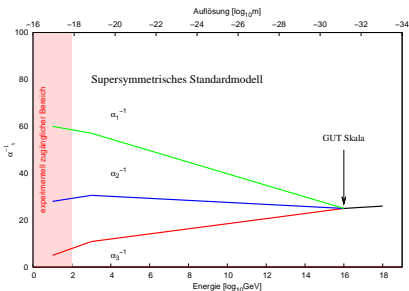
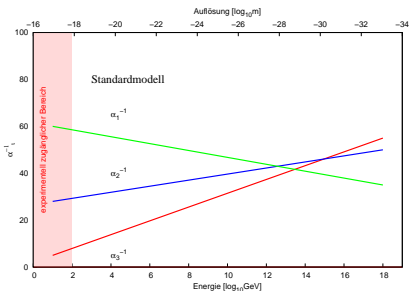
Supersymmetrie: Vollständige Symmetrie  
zwischen Bosonen und Fermionen

$$Q |\text{Fermion}\rangle = |\text{Boson}\rangle$$

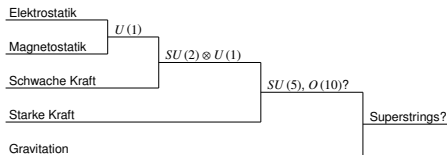
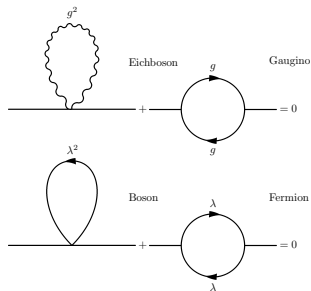
$$Q |\text{Boson}\rangle = |\text{Fermion}\rangle$$

- Supersymmetrie-Operator  $Q$  mit Spin  $1/2$

- Vereinigung der Kopplungen
- Lösung für das Hierarchie-Problem, weniger Divergenzterme
- Brechung der elektroschw. WW als Konsequenz der SUSY-Brechung
- Lokale Supersymmetrie  $\phi'_i(x) = U_i^j \phi_j(x) \rightarrow U_i^j(x) \phi_j(x)$   
→ SUGRA (mit ART im Niederenergie-Limes)
- Für TOE's (Stringtheorien) notwendige Ingredienz
- Quark confinement
- Liefert Kandidat für Dunkle Materie

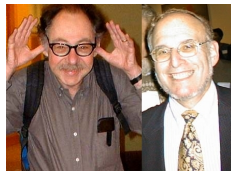


- Vereinigung der Kopplungen
- Lösung für das Hierarchie-Problem, weniger Divergenzterme
- Brechung der elektroschw. WW als Konsequenz der SUSY-Brechung
- Lokale Supersymmetrie  $\phi'_i(x) = U^j_i \phi_j(x) \rightarrow U^j_i(x) \phi_j(x)$   
→ SUGRA (mit ART im Niederenergie-Limes)
- Für TOE's (Stringtheorien) notwendige Ingredienz
- Quark confinement
- Liefert Kandidat für Dunkle Materie



# Das No-Go Theorem von Coleman und Mandula ('67)

- Nicht-triviale Vereinigung der Poincaré-Gruppe  $\mathcal{P}$  mit interner Lie-Gruppe  $\mathcal{I}$  führt zu trivialer Physik mit Streumatrix =  $\mathbb{1}$  oder einfacher Produktgruppe mit  $[P^\mu, T_a] = [M^{\mu\nu}, T_a] = 0$ .



Interne Lie-Gruppe  $\mathcal{I}$

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c$$

## Die Poincaré-Algebra

Lie-Algebra der Lorentz-Gruppe:

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i (\eta^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} M^{\nu\rho} - \eta^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\sigma} M^{\mu\sigma})$$

Translationen:

$$[P^\mu, P^\nu] = 0$$

$$[M^{\mu\nu}, P^\rho] = i (\eta^{\nu\rho} P^\mu - \eta^{\mu\rho} P^\nu)$$

# Die $\mathbb{Z}_2$ -Graduierung von Golfand & Likhtman ('71)

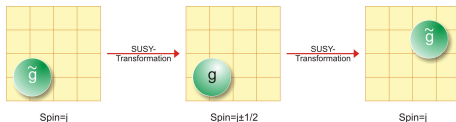
- Hinzunahme anti-kommutierender Generatoren

$$[B, B] \sim B, \quad [B, F] \sim F, \quad \{F, F\} \sim B$$

## Die Poincaré-Superalgebra

Poincaré-Algebra,

$$\begin{aligned} \{Q_A, \bar{Q}_B\} &= 2\sigma_{AB}^{\mu} P_{\mu}, & \{\bar{Q}_A, Q_B\} &= 2\bar{\sigma}_{AB}^{\mu} P_{\mu}, \\ [Q_A, M^{\mu\nu}] &= \sigma_{AB}^{\mu\nu} Q_B, & [\bar{Q}_A, M^{\mu\nu}] &= \bar{\sigma}_{AB}^{\mu\nu} \bar{Q}_B, \\ [Q_A, P^{\mu}] &= 0, & [\bar{Q}_A, P^{\mu}] &= 0, \\ \{Q_A, Q_B\} &= 0, & \{\bar{Q}_A, \bar{Q}_B\} &= 0. \end{aligned}$$



- Haag-Lopuszanski-Sohnius ('75) → einzig mögliche Graduierung!

# Superraum-Konzept von Salam und Stathdee ('75)

- Reeller Superraum  $\mathbb{R}^{4|4}$

$$\underbrace{(x^0, x^1, x^2, x^3)}_{\text{bosonisch}}, \underbrace{(\theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4)}_{\text{fermionisch}} \in \mathbb{R}^{4|4}$$

- treue Darstellung der Poincaré-Supergruppe

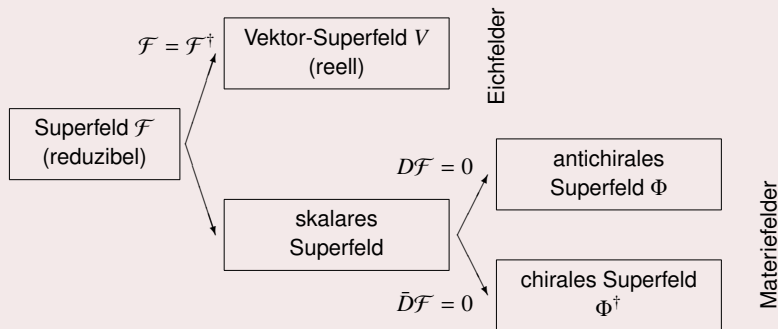
$$L(a, \epsilon, \bar{\epsilon}) := \underbrace{\exp(-ia^\mu P_\mu)}_{\text{Translation}} \cdot \underbrace{\exp(i\epsilon Q + i\bar{\epsilon}\bar{Q})}_{\text{SUSY-Translation}}$$

- Potenzreihenentwicklung in  $\theta$  und  $\bar{\theta}$ : Allgemeines Superfeld

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x, \theta, \bar{\theta}) &= f(x) + \theta\phi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + (\theta\theta)M(x) \\ &\quad + (\bar{\theta}\bar{\theta})N(x) + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu(x) + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) \\ &\quad + (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\alpha(x) + (\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})d(x) \end{aligned}$$



# Das irreduzible Superfeld



- Nicht-abelsche Eichtransformation

$$\mathcal{F} = e^{-i\Lambda(x)} \mathcal{F}$$

$$\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) \rightarrow e^{-i\Lambda(x, \theta, \bar{\theta})} \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) \quad \Phi^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) \rightarrow \Phi^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) e^{i\Lambda^\dagger(x, \theta, \bar{\theta})}$$

# Die Lagrangedichte

- Herstellung der Eichinvarianz durch komplexes Feld

$$\mathcal{L}' = \Phi'^{\dagger} \Phi' \Big|_d = \Phi^{\dagger} e^{i(\Lambda^{\dagger} - \Lambda)} \Phi \Big|_d \neq \Phi^{\dagger} \Phi \Big|_d \quad e^V \rightarrow e^{-i\Lambda^{\dagger}} e^V e^{i\Lambda}$$

## Konstruktion des Superfeldstärketensors

$$W_A \rightarrow e^{-i\Lambda} W_A e^{i\Lambda} \quad W_A := -\frac{1}{4} (\bar{D}\bar{D}) e^{-V} D_A e^V$$

- Mit  $D_A = \frac{\partial}{\partial\theta^A} + i(\sigma^{\mu\bar{\theta}})_A \partial_{\mu}$  und  $\bar{D}_{\dot{A}} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{A}}} + i(\tilde{\sigma}^{\mu\bar{\theta}})_{\dot{A}} \partial_{\mu}$  ist

$$\mathcal{L} := \text{Tr}_c \left\{ (W^A W_A)_F \right\} = \underbrace{\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a}_{\text{Eichfelder}} + \underbrace{\frac{1}{2} \bar{\lambda}^a \gamma_{\mu} (\mathcal{D}_{\mu} \lambda)^a}_{\text{Gluininos}} - \underbrace{\frac{1}{2} d^a d^a}_{\text{d-Term}}$$

# Effektive Wirkung mit Majorana-Spinoren

- Mit  $(\mathcal{D}\lambda) = \partial_\mu \lambda + [A_\mu, \lambda]$  ist

$$\mathcal{S}_{\text{SYM}} = \int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x \left\{ \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \frac{1}{2} \bar{\lambda}^a \gamma_\mu \mathcal{D}_\mu^{ab} \lambda^b \right\}$$

- Einführung einer Gluino-Masse  $m_{\tilde{g}}$  durch einen Brechungsterm

$$\mathcal{L}_{\text{ges}} = \mathcal{L} + m_{\tilde{g}} \bar{\lambda} \lambda$$

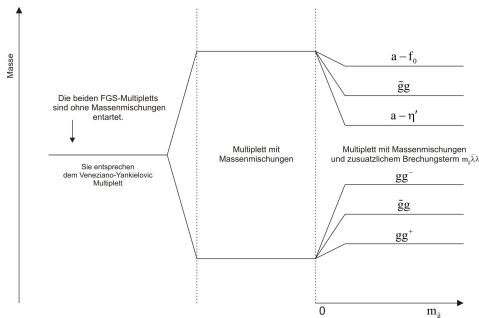
- Teilcheninhalt der effektiven Veneziano-Yankielowicz-Wirkung und ihre  $SU(3)_f$  - Analoga

	Meson	Spin	Masse	Name	$SU(3)_f$
• 1 Pseudoskalares Boson	$\bar{\lambda} \gamma_5 \lambda$	0	$m_{\tilde{g}\tilde{g}}^{0-}$	$a\text{-}\eta'$	$\eta'$
• 1 Skalares Boson	$\bar{\lambda} \lambda$	0	$m_{\tilde{g}\tilde{g}}^{0+}$	$a\text{-}f_0$	$f_0$
• 1 Majorana-Fermion	$F_{\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu} \lambda$	1/2	$m_{\tilde{g}\tilde{g}}$	Gluino-Glueball	$\emptyset$

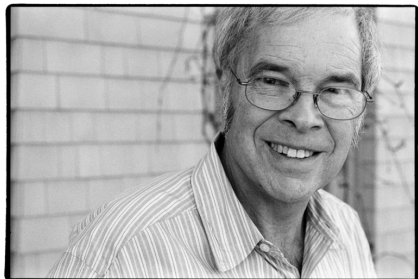
# Verbesserte Wirkung von Farrar, Gabadadze, Schwetz

- Teilcheninhalt des leichteren Multipletts der effektiven Wirkung von Farrar, Gabadadze und Schwetz

	Meson	Spin	Masse	Name
• 1 Skalares Boson	$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$	0	$m_{gg}^{0+}$	$0^+$ -Glueball
• 1 Pseudoskalares Boson	$F^{\mu\nu} \epsilon^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$	0	$m_{gg}^{0-}$	$0^-$ -Glueball
• 1 Majorana-Fermion	$F_{\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu} \lambda$	1/2	$m_{g\tilde{g}}$	Gluiino-Glueball



- 1 Das Konzept der Supersymmetrie
- 2 Die Wirkung auf dem Gitter**
- 3 Der Simulationsalgorithmus



# Die diskretisierte Eich- und Fermionwirkung

- Kontinuumswirkung

$$\mathcal{S}_{\text{SYM}} = \mathcal{S}_g + \mathcal{S}_f = \int d^4x \left\{ \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \frac{1}{2} \bar{\lambda}^a \gamma_\mu \mathcal{D}_\mu^{ab} \lambda^b \right\}$$

## Standardformulierung der Eichwirkung nach Wilson

$$\mathcal{S}_g^{\text{lat}} = \beta \sum_x \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq 4} \left[ 1 - \frac{1}{N_c} \text{Re Tr } U_{\mu\nu} \right]$$

- Die Diskretisierung der Fermionwirkung führt mit

$$\mathcal{S}_{\text{CV}} = \mathcal{S}_f + \mathcal{S}_W + \mathcal{S}_m$$

## zur Curci-Veneziano Fermion-Wirkung

$$\mathcal{S}_f = \frac{1}{2} \sum_{xy} \bar{\lambda}(x) Q_{x,y} \lambda(y) = \frac{1}{2} \sum_{xy} \lambda^T(x) C Q_{x,y} \lambda(y)$$

# Die Fermionmatrix $Q$ und die Eichmatrix $V$ -matrix

- mit der Fermionmatrix

$$Q_{y,x}[U] = \delta_{y,x} - \kappa \sum_{\mu} \left\{ \delta_{y,x+\hat{\mu}} [\mathbb{1} + \gamma_{\mu}] V_{\mu}(x) + \delta_{y+\hat{\mu},x} [\mathbb{1} - \gamma_{\mu}] V_{\mu}^T(y) \right\}$$

- und der Eichmatrix

$$[V_{\mu}(x)]_{ab} = 2 \text{Tr} [U_{\mu}^{\dagger}(x) T^a U_{\mu}(x) T^b]$$

## Behandlung von Majorana-Spinoren auf dem Gitter

$$\left| \int \mathcal{D}[\lambda] e^{-\frac{1}{2} \bar{\lambda} Q \lambda} \right| = (\det Q^{\dagger} Q)^{1/4} = \int [d\phi^{\dagger} d\phi] e^{-\sum_{x,y} \phi_y^{\dagger} [Q^{\dagger} Q]_{yx}^{-1/4} \phi_x}$$

$\uparrow$   
 Grassmann-Zahlen

$\uparrow$   
 komplexe Zahlen

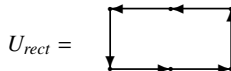
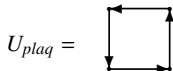
$\uparrow$   
 Matrixinversion

# Optimierte Wirkungen und ihre Vorteile

- Bessere Symmetrieeigenschaften schon bei endlichen Gitterabständen
- Schnellere Konvergenz in den Kontinuums-Limes
- Kürzere Korrelationen
- Schnellerer Simulationsablauf durch bessere Konditionszahlen

## Verbesserte Eichwirkung

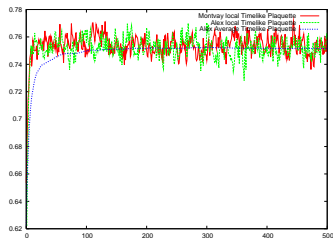
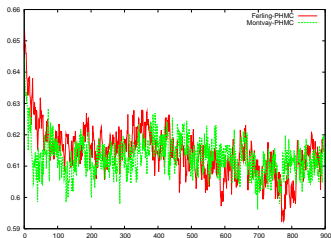
$$S_g = \beta \left( c_0 \sum_{plaq} \text{Re Tr} \left\{ 1 - \frac{1}{3} U_{plaq} \right\} + c_1 \sum_{rect} \text{Re Tr} \left\{ 1 - \frac{1}{3} U_{rect} \right\} \right)$$





# Optimierte Eichwirkung

	$c_1/c_0$	$\beta c_0$	$\beta c_1$
Wilson	0		
Symanzik	-0.05		
Iwasaki	-0.091		
QCDTARO		6.1564(53)	-0.62141(23)
		7.986(12)	-0.9169(41)



# STOUT Smearing nach Morningstar und Peardon ('97)

- beide Wirkungen können optimiert werden

$$S = \begin{array}{ccc} S_g & + & S_f \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{DBW2} & & \text{STOUT} \end{array}$$

- Smearing mit Exponentialfunktionen belässt die resultierenden Matrizen im Gruppenraum
- In endlicher komplexer Ebene analytisch

$$U_\mu^{(1)}(x) = e^{iQ_\mu(x)} U_\mu(x)$$

- Smearing Matrix

$$Q_\mu(x) = \frac{i}{2} \left( U_\mu(x) C_\mu^\dagger - C_\mu U_\mu^\dagger(x) \right) - \frac{i}{2N} \text{Tr} \left( U_\mu(x) C_\mu^\dagger - C_\mu U_\mu^\dagger(x) \right)$$

$$\text{mit } C_\mu(x) = \sum_{\nu \neq \mu} \rho_{\mu\nu} \left( U_\nu(x) U_\mu(x + \hat{\nu}) U_\nu^\dagger(x + \hat{\mu}) \right. \\ \left. + U_\nu^\dagger(x - \hat{\nu}) U_\mu(x - \hat{\nu}) U_\mu(x - \hat{\nu}) U_\nu(x - \hat{\nu} + \hat{\mu}) \right)$$

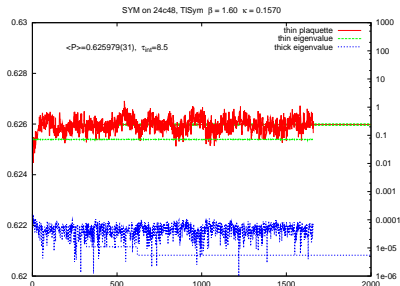
$U_\mu^{(1)}(x) = U_\mu(x) + \frac{1}{2} \sum_{\nu \neq \mu} \rho_{\mu\nu} \left\{ \right.$

$n$ -faches Smearing der Links

$$U \rightarrow U^{(1)} \rightarrow \dots \rightarrow U^{(n)} \equiv \tilde{U}$$

Einbindung in SYM-Wirkung

$$\left[ \tilde{V}_\mu(x) \right]_{ab} = 2 \text{Tr} \left[ \tilde{U}_\mu^\dagger(x) T^a \tilde{U}_\mu(x) T^b \right]$$



- 1 Das Konzept der Supersymmetrie
- 2 Die Wirkung auf dem Gitter
- 3 Der Simulationsalgorithmus



# Grundidee der Molekular-Dynamik

- Ensemble-Mittelwert  $\rightarrow$  Monte-Carlo Zeit-Mittelwert

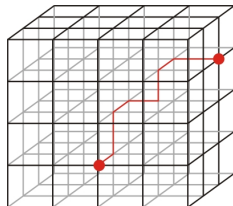
$$\langle O \rangle_{\text{kan.}} \xrightarrow{\text{therm. lim.}} \langle O \rangle_{\text{mikr.}} \Big|_{E=\bar{E}} \xrightarrow{\text{ergod.}} \lim \frac{1}{T} \int_0^T d\tau O(\{U_i(\tau)\})$$

- Erweiterung der Zustandssumme

$$\langle O \rangle = \frac{1}{\bar{Z}} \int \mathcal{D}U O e^{-S[U]} \quad \bar{Z} = \int \mathcal{D}U e^{-S[U]}$$

## Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{d\tau} P_g = -D S_g - D S_f \quad \text{und} \quad \frac{d}{d\tau} U_{x\mu} = -i P_g U_{x\mu}$$



# Grundidee der Molekular-Dynamik

- Ensemble-Mittelwert  $\rightarrow$  Monte-Carlo Zeit-Mittelwert

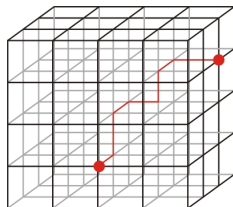
$$\langle O \rangle_{\text{kan.}} \xrightarrow{\text{therm. lim.}} \langle O \rangle_{\text{mikr.}} \Big|_{E=\bar{E}} \xrightarrow{\text{ergod.}} \lim \frac{1}{T} \int_0^T d\tau O(\{U_i(\tau)\})$$

- Erweiterung der Zustandssumme zu einem fiktiven 5D Phasenraum

$$\langle O \rangle = \frac{1}{\bar{Z}} \int \mathcal{D}U \mathcal{D}P O e^{-\frac{1}{2} \sum_i P_i^2 - S[U]} \quad \bar{Z} = \int \mathcal{D}U \mathcal{D}P e^{-\frac{1}{2} \sum_i P_i^2 - S[U]}$$

## Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{d\tau} P_g = -D S_g - D S_f \quad \text{und} \quad \frac{d}{d\tau} U_{x\mu} = -i P_g U_{x\mu}$$



# Langevin-Algorithmus + Metropolis-Algorithmus

- MD: stark **nicht-lokal**, aber auch **nicht ergodisch**
- Langevin: **Nicht-lokaler** Algorithmus zum gleichzeitigen Update aller Links, **ergodisch** aber mit **Diskretisierungsfehlern**

Langevin-Gleichung mit Zufallsvariable  $\eta$

$$\frac{d}{d\tau} U_i = -\frac{\partial}{\partial U_i} \mathcal{S}[U] + \eta_i(\tau)$$

Ergodizität durch Akzeptanz-Rejektionsschritt

$$W_A \left( (U_i, P_i) \rightarrow (U_j, P_j) \right) = \min \left( 1, \frac{e^{-H(P_j, U_j)}}{e^{-H(P_i, U_i)}} \right)$$

- Systematische Fehler werden hierdurch exponentiell unterdrückt
- Keine Extrapolation auf verschiedene Zeitskalen notwendig um Fehler abzuschätzen





# Polynomiale Approximation der Fermionmatrix

- Bei ungerader Flavour-Zahl: Polynomiale Approximation von  $Q$

$$\begin{aligned}\sqrt{\det Q} &= [\det Q^\dagger Q]^{\frac{1}{4}} = \int [d\phi^\dagger d\phi] e^{-\sum_{x,y} \phi_y^\dagger (\tilde{Q}_{yx}^2)^{-\frac{1}{4}} \phi_x} \\ &\rightarrow \int [d\phi^\dagger d\phi] e^{-\sum_{x,y} \phi_y^\dagger P_n(\tilde{Q}^2)_{yx} \phi_x}\end{aligned}$$

- Quadratisch optimierte Polynome*, erzeugt mit *CLN*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = \left[ \frac{1}{x} \right]^{\frac{N_f}{2}} \quad \forall x \in [\epsilon, \lambda]$$

- in Wurzelardarstellung ist  $\rho_j \equiv \mu_j + i\nu_j \equiv \sqrt{r_j}$  und

$$P(\tilde{Q}^2) = c_0 \prod_{i=1}^n (\tilde{Q} - \rho_i) \prod_{i=n}^1 (\tilde{Q} - \rho_i^*)$$

# Entwicklung der Trajektorie: Monte-Carlo Zeitschritt

## Zeitschritt mit Eichfeldern und Impulsen

$$U'_{x\mu} = \exp \left\{ \sum_j i2T_j P_{x\mu j} \Delta\tau \right\} U_{x\mu}$$

$$P'_{x\mu j} = P_{x\mu j} - D_{x\mu j} \mathcal{S}[U, \phi] \Delta\tau$$

Definition der Ableitung: 
$$D_{x\mu j} f[U] = \left. \frac{d}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} f(e^{i2\alpha T_j} U_{x\mu})$$

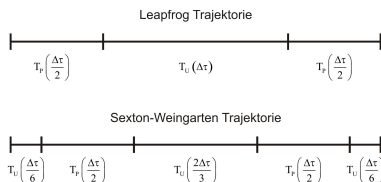
Ableitung der fermionischen Wirkung mit 
$$\left[ D_{x\mu j} V_\mu \right]_{ab} = 2f_{bjc} \left[ V_\mu \right]_{ac}$$

$$\begin{aligned} \phi_a \left[ \left( D_{x\mu j} P(\tilde{Q}^2) \right) \right]_{ab} \phi_b^\dagger &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \phi_{1,a}^{(k)}(x) \left( D_{x\mu j} \tilde{Q} \right) \phi_{2,b}^{(k)\dagger}(y) \right\} \\ &= -2 \operatorname{Re} \kappa \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \phi_{1,a}^{(k)}(x) \left( \gamma_5 + \gamma_\mu \gamma_5 \right) 2f_{bjc} \left[ V_\mu \right]_{ac} \phi_{2,b}^{*(k)}(x + \hat{\mu}) \right. \\ &\quad \left. + \phi_{2,a}^{(k)}(x) \left( \gamma_5 + \gamma_\mu \gamma_5 \right) 2f_{bjc} \left[ V_\mu \right]_{ac} \phi_{1,b}^{*(k)}(x + \hat{\mu}) \right\} \end{aligned}$$

# Integratoren

- Leapfrog Integrator

$$T_{tot}(\Delta\tau) = T_P\left(\frac{\Delta\tau}{2}\right) T_U(\Delta\tau) T_P\left(\frac{\Delta\tau}{2}\right)$$



- Sexton-Weingarten Integrator

$$T_{ges}(\Delta\tau) = T_U\left(\frac{\Delta\tau}{6}\right) T_P\left(\frac{\Delta\tau}{2}\right) T_U\left(\frac{2\Delta\tau}{3}\right) T_P\left(\frac{\Delta\tau}{2}\right) T_U\left(\frac{\Delta\tau}{6}\right)$$

## Higher Order Sexton-Weingarten Integrator auf multiplen Zeitskalen

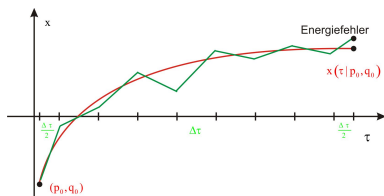
$$T_i(\Delta\tau_i) = T_{S_i}\left(\frac{\Delta\tau_i}{6}\right) \left\{ T_{i-1}\left(\frac{\Delta\tau_{i-1}}{2}\right) \right\}^{N_{i-1}} T_{S_i}\left(\frac{2\Delta\tau_i}{3}\right) \left\{ T_{i-1}\left(\frac{\Delta\tau_{i-1}}{2}\right) \right\}^{N_{i-1}} T_{S_i}\left(\frac{\Delta\tau_i}{6}\right)$$

- Exakt: Second Order Minimal Norm Integration Scheme (2MN)  
→ Zusätzlicher Tuningparameter / nur kleine Verbesserung

# Integratoren

- Leapfrog Integrator

$$T_{tot}(\Delta\tau) = T_P\left(\frac{\Delta\tau}{2}\right) T_U(\Delta\tau) T_P\left(\frac{\Delta\tau}{2}\right)$$



- Sexton-Weingarten Integrator

$$T_{ges}(\Delta\tau) = T_U\left(\frac{\Delta\tau}{6}\right) T_P\left(\frac{\Delta\tau}{2}\right) T_U\left(\frac{2\Delta\tau}{3}\right) T_P\left(\frac{\Delta\tau}{2}\right) T_U\left(\frac{\Delta\tau}{6}\right)$$

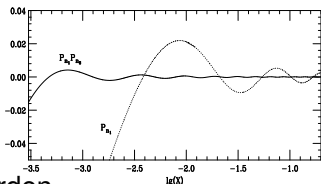
## Higher Order Sexton-Weingarten Integrator auf multiplen Zeitskalen

$$T_i(\Delta\tau_i) = T_{S_i}\left(\frac{\Delta\tau_i}{6}\right) \left\{ T_{i-1}\left(\frac{\Delta\tau_{i-1}}{2}\right) \right\}^{N_{i-1}} T_{S_i}\left(\frac{2\Delta\tau_i}{3}\right) \left\{ T_{i-1}\left(\frac{\Delta\tau_{i-1}}{2}\right) \right\}^{N_{i-1}} T_{S_i}\left(\frac{\Delta\tau_i}{6}\right)$$

- Exakt: Second Order Minimal Norm Integration Scheme (2MN)  
→ Zusätzlicher Tuningparameter / nur kleine Verbesserung

# Polynome in der Zwei-Schritt Approximation

- Metropolis-Schritt wird selten durchgeführt
- Weniger Rechenaufwand als in der MD-Trajektorie (keine Skalarfeldsumme)
- → In Akzeptanz-Rejektionsschritt kann höhere Polynomordnung  $P_2$  verwendet werden



$$\frac{1}{x} \equiv P_{n_1, n_2}(x) = P_1(x) P_2(x)$$

$$W_A([U] \rightarrow [U']) = \min\left\{1, \exp\left(-\eta^\dagger \left[ P_2(\tilde{Q}^2[U']) - P_2(\tilde{Q}^2[U]) \right] \eta\right)\right\}$$

- $P_3$  für die Noisy-Estimator  $\eta$

$$\mathcal{P}[\bar{\eta}] = \frac{e^{-\bar{\eta}^\dagger \eta}}{\int [\bar{\eta}^\dagger][\bar{\eta}] e^{-\bar{\eta}^\dagger \eta} [\bar{\eta}^\dagger][\bar{\eta}]}$$

$$\eta = \underbrace{P_2(\tilde{Q}[U]^2)^{-\frac{1}{2}}}_{P_3} \bar{\eta}$$

# Optimierungen während der Messung

- Bestimmung der kleinsten Eigenwerte während des Updates pro Konfiguration mit Kalkreuter-Simma
- Neugewichtung während der Messung möglich

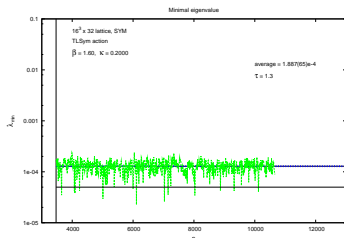
$$\langle W \rangle = \frac{\left\langle W \exp \left\{ \eta^\dagger \left[ 1 - P_4(\tilde{Q}) \right] \eta \right\}_{U,\eta} \right\rangle}{\left\langle \exp \left\{ \eta^\dagger \left[ 1 - P_4(\tilde{Q}) \right] \eta \right\}_{U,\eta} \right\rangle}$$

$$\lim_{n_4 \rightarrow \infty} P_1(x) P_2(x) P_4(x) = x^{-N_f/2} \quad \text{mit } x \in [0, \lambda]$$

- Ordnung der Polynome

$$O(P_2) \sim 10 \times O(P_1) \quad O(P_3) \sim 1,25 - 1,5 \times O(P_2)$$

- Berücksichtigung des Vorzeichens während des Messprozesses



# Beschleunigung des Algorithmus

- Even-Odd Präkonditionierung ( $\tilde{Q} = Q\gamma_5$ )

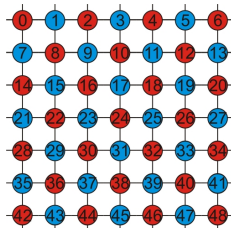
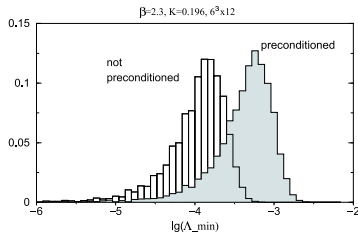
$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} \gamma_5 & -\gamma_5 \kappa M_{\text{even-odd}} \\ -\gamma_5 \kappa M_{\text{odd-even}} & \gamma_5 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \det \tilde{Q} = \det(1 - \kappa^2 M_{oe} M_{eo})$$

- Determinant Breakup

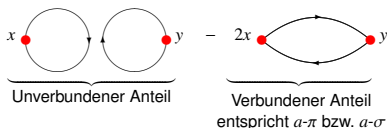
$$\det \tilde{Q}^2 = \left\{ \left( \det \tilde{Q}^2 \right)^{\frac{1}{n_B}} \right\}^{n_B}$$

→ Halbiert Polynomordnung  $P_1$



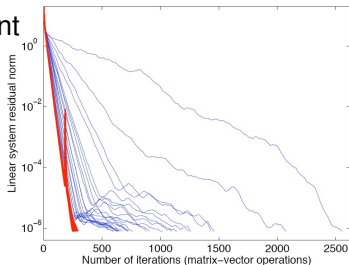
# Matrixinversionen in Korrelatoren

- z.B. Gluinoball  $a - f_0$  und  $a - \eta'$



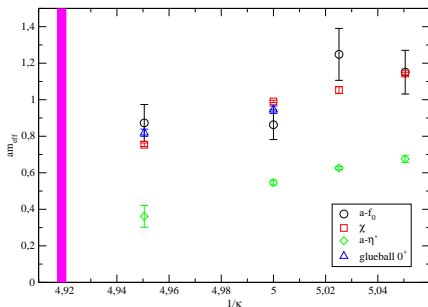
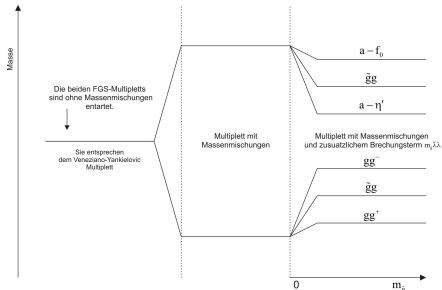
$$C_{\tilde{g}\tilde{g}}(\Delta t) = \frac{1}{L^3} \sum_{\vec{x}, \vec{y}} \langle \text{Tr}_{sc} \{ \Gamma Q_{xx}^{-1} \} \text{Tr}_{sc} \{ \Gamma Q_{yy}^{-1} \} \rangle - 2 \sum_{\vec{x}} \langle \text{Tr}_{sc} \{ \Gamma Q_{xy}^{-1} \Gamma Q_{yx}^{-1} \} \rangle$$

- Auch hier EO-Präkonditionierung (allerdings mit LU-Zerlegung)
- Matrix-Inversion mit Conjugate Gradient
- Verringerung der Iterationsschritte durch Deflating





	Meson	Spin	Masse	Name	
<b>VENEZIANO-YANKIELOWICZ Multipllett</b>					
•	1 Skalares Boson	$\bar{\lambda}\lambda$	0	$m_{\bar{g}\bar{g}}^{0+}$	$a-f_0$
•	1 Majorana-Fermion	$F_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}\lambda$	1/2	$m_{\bar{g}\bar{g}}$	Gluiino-Glueball
•	1 Pseudoskalares Boson	$\bar{\lambda}\gamma_5\lambda$	0	$m_{\bar{g}\bar{g}}^{0-}$	$a-\eta'$
<b>FARRAR-GABADADZE-SCHWETZ Multipllett-Erweiterung</b>					
•	1 Pseudoskalares Boson	$F^{\mu\nu}\epsilon_{\mu\nu}^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$	0	$m_{gg}^{0-}$	$0^-$ -Glueball
•	1 Majorana-Fermion	$F_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}\lambda$	1/2	$m_{g\bar{g}}$	Gluiino-Glueball
•	1 Skalares Boson	$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$	0	$m_{gg}^{0+}$	$0^+$ -Glueball



**PHMC-Algorithmus** Moderner Algorithmus für globale Updates mit kurzen Autokorrelationen, frei von systematischen Fehlern

**Optimierungen durch** Präkonditionierung,  
Determinant Breakup,  
Tensorprodukt,  
Sexton-Weingarten Integrator und  
minimierter Parallelkommunikation

**Verbesserte Wirkungen** zur Minimierung von Gitterartefakten schon bei endlichem Gitterabstand  $a$

**Tests** und Vergleiche mit anderen Programmen

**Auflösung  $\alpha$**  Bestimmung der physikalischen Dimension mit der Sommer-Skala  $R_0$

**Kritischer Punkt  $\kappa$**  Tuning mit der adjungierten Pionmasse und Ward-Identitäten

**Polynomordnungen  $P_1, P_2, P_3$**  über die Akzeptanzraten

**Approximationsintervall  $(\epsilon, \lambda)$**  mit Kalkreuter-Simma

**Autokorrelationszeiten** primärer Observablen

# Ausblick und mögliche Verbesserungen

## Update:

- Anisotroper Gitter** verwenden, um bessere Korrelatorstatistiken zu erzielen
- Verbesserte Wirkung** Sheikholeslami-Wohlert Konzept auf SUSY übertragen zur Unterdrückung von  $O(a)$ -Effekten
- Domain-Wall Fermionen** verwenden, um den chiralen Symmetriebruch zu vermeiden
- Domain Decomposition** implementieren, um den Parallelkommunikationsaufwand auf großen Prozessorarrays weiter zu minimieren

## Measurement:

- Korrelatoren** neue/verbesserte Korrelatoren mit besserer Zustandsüberlappung
- $SU(3)_c$  Simulation** zum Vergleich von Supersymmetrie mit Ein-Flavour QCD